РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

С.Е. Гилев, С.В. Леонтьев, Д.А. Новиков

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УПРАВЛЕНИИ РЕГИОНАЛЬНЫМ РАЗВИТИЕМ

Москва - 2002

Гилев С.Е., Леонтьев С.В., Новиков Д.А. **Распределенные системы принятия решений в управлении региональным развитием.** М.: ИПУ РАН, 2002. – 52 с.

Настоящая работа содержит результаты исследований теоретико-игровых и оптимизационных моделей распределенных систем принятия решений, то есть систем управления, характеризуемых наличием нескольких взаимодействующих активных центров, оценивающих эффективность решений по нескольким критериям. В качестве объекта управления рассматриваются программы регионального развития.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению организационными системами.

Рецензент: д.т.н. В.Н. Бурков

Утверждено к печати Редакционным советом Института

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Программы регионального развития представляют собой комплекс взаимосвязанных мероприятий, нацеленных на достижение целей развития, оцениваемых по социальным, экономическим и др. критериям. Программы включают набор проектов, проекты – наборы подпроектов (работ). Типичным примером проектов являются проекты реформирования и реструктуризации (ПРР) предприятий [20], организаций, их подразделений и других объектов, направленные на повышение эффективности функционирования реформируемого объекта. Как правило, каждый ПРР служит достижению одновременно нескольких целей и требует определенных затрат. Поэтому эффективность функционирования может оцениваться по многим параметрам. Соответственно, эффект, достигаемый реализацией ПРР, оценивается по нескольким критериям. Задача управления заключается в выделении множества ПРР, которые при заданных ограничениях следует реализовывать и поддерживать в первую очередь.

В практике регионального управления субъект, решающий задачу управления, является коллективным, то есть состоит из нескольких субъектов, обладающих собственными интересами и предпочтениями, причем предпочтения различных субъектов могут различаться между собой. Примерами могут служить ПРР, поддерживаемые администрацией региона, в котором находятся реформируемые предприятия [20]. При этом различные структурные подразделения администрации региона могут быть заинтересованы в первоочередном достижении различных целей. Наличие несовпадающих интересов отнюдь не является свидетельством неэффективности системы управления, а отражает объективно существующую сложность объекта управления.

Организационные и социально-экономические системы, в которых имеются несколько управляющих органов, находящихся на одном или нескольких уровнях иерархии, получили название систем с распределенным контролем (РК) или распределенных систем принятия решений (РСПР) [16, 20]. Задача анализа РСПР заключается в описании множества равновесных в том или ином смысле состояний и/или стратегий ее участников, задача синтеза – в поиске процедур взаимодействия (механизмов функционирования) лиц, принимающих решения (ЛПР), позволяющих им согласованно принимать эффективные управленческие решения.

При этом возникают три сложности. Во-первых, для определения эффективности того или иного решения необходимо иметь модель поведения управляемого субъекта в зависимости от этого решения (управления). Во-вторых, все участники рассматриваемой системы обладают свойством активности (то есть способностью самостоятельно принимать решения – выбирать состояния, сообщать информацию и т.д., в соответствии с собственными интересами [10]), следовательно и модель управляемого субъекта, и процедуры взаимодействия ЛПР, должны учитывать эту активность. В-третьих, система принятия решений, помимо распределенности, может характеризоваться сложной многоуровневой структурой. Поэтому исследования двухуровневых моделей (ПРР на нижнем уровне и «горизонтальная» РСПР на верхнем уровне) оказывается недостаточно – следует рассматривать и многоуровневые системы. Другими словами, имеют место как «горизонтальная» распределенность в принятии решений (характеризуемая наличием нескольких принимающих решения субъектов, находящихся на одном и том же уровне иерархии), так и «вертикальная» распределенность в принятии решений (характеризуемая наличием нескольких уровней иерархии, на которых находятся принимающие решения субъекты).

Модели целенаправленного поведения изучаются в рамках таких направлений теории управления в социально-экономических системах как: теория активных систем [10, 24, 28, 29], теория иерархических игр [11, 12, 13], теория выбора [1, 16, 22] и др. Основным методом исследований является теоретико-игровое моделирование, позволяющее предсказать поведение участников системы и выбрать управления, приводящие систему в наиболее предпочтительные с точки зрения выбранного критерия состояния.

Базовой моделью теории активных систем (АС) является двухуровневая статическая детерминированная АС, содержащая одного управляющего органа – центра – на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта – активного элемента (АЭ) – на нижнем уровне. Результаты теоретико-игрового анализа базовой модели приведены в [12, 24, 26]. Наиболее близкими к РСПР являются модели многоэлементных АС [28], одноэлементных АС с РК [14, 29] и многоуровневых АС [27]. Тем не менее, многоэлементные многоуровневые АС с РК в литературе не рассматривались (см. системы классификаций и обзоры в [28, 29]). Поэтому в настоящей работе сначала исследуется выделенный класс моделей АС, а затем теоретические результаты используются для построения и анализа РСПР по поддержке ПРР.

Изложение начинается с описания базовой модели – многоэлементной двухуровневой АС с РК, для которой характеризуются равновесные стратегии центров и АЭ, и определяются возможности согласования интересов участников АС. Затем на основе полученных результатов изучаются многоуровневые многоэлементные АС с РК, для которых согласование интересов (в том числе - критериев оценки ПРР) производится в рамках РСПР, моделируемой взаимодействием участников верхних уровней иерархии.

2. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим АС, на нижнем уровне которой находятся n ³ 1 АЭ, стратегией каждого из которых является выбор действия (нижний индекс нумерует АЭ) y_i Î A_i Í $\Re_+^{n_i}$, n_i ³ 1, i Î $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству АЭ. Управление АЭ осуществляется k центрами ($K = \{1, 2, \ldots, k\}$ – множество центров). Стратегией i-го центра является выбор вектора (верхний индекс нумерует центры) $u^i = (u_1^i, u_2^i, \ldots, u_n^i)$ Î $U^i = \prod_{j \in I} U_j^i$, где $u_j^i \in U_j^i$ - управление j-ым АЭ со стороны i-го центра, i Î K, j Î I. Вектор управлений всех центров обозначим $u = (u^1, u^2, \ldots, u^k)$ Î $U = \prod_{i \in K} U^i$.

Предпочтения каждого АЭ отражены в общем случае набором целевых функций. Для i-го АЭ j-ю компоненту его целевой функции обозначим $f_{ij}(\cdot)$, $j = \overline{1, m_i}$, где m_i – «размерность предпочтений»; множество компонентов целевой функции АЭ обозначим $M_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$, i Î I. Целевая функция i-го АЭ зависит от управления $u_i = (u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^k)$ Î $U_i = \prod_{j \in K} U_i^j$ и вектора действий АЭ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Î A', то есть $f_{ij}(u_i, y)$: U_i ´ A' ® Â^1, где $A' = \prod_{i \in I} A_i$ - множество допустимых действий всех АЭ. Отметим, что АЭ сильно связаны (в соответствии с терминологией, предложенной в [26, 28]), то есть целевая функция каждого из них в общем случае явным образом зависит от действий всех АЭ.

Предпочтения центров отражены их векторными целевыми функциями $F^{ij}(u^i, y)$: U^i ´ A' ® R^1, $j = \overline{1, q_i}$, где q_i – «размерность предпочтений» i-го центра, i Î K. Обозначим множество компонентов целевой функции i-го центра $Q_i = (1, 2, \ldots, q_i)$, i Î K.

Относительно целевых функций и допустимых множеств введем следующее предположение, которого будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе всего последующего изложения.

А.1. Множества допустимых стратегий всех участников АС компактны, а целевые функции непрерывны по всем переменным.

Предположим, что порядок функционирования (то есть последовательность получения информации и принятия решений [24]) следующий: сначала центры одновременно и независимо (это предположение исключает из рассмотрения кооперативные эффекты взаимодействия центров, которые подробно исследованы в [14]) выбирают свои стратегии, являющиеся функциями от будущих выборов АЭ (это означает, что рассматривается игра $Г_2$ [12, 13, 15]) и сообщают их АЭ, которые затем одновременно и независимо (это предположение исключает из рассмотрения кооперативные эффекты взаимодействия АЭ) производят выбор своих действий, тем самым окончательно определяя выигрыши участников АС.

Рассматриваемая многоэлементная АС с РК характеризуется тем, что в ней последовательно разыгрываются две игры [15, 29]: игра центров (по определению управлений) и игра АЭ (по определению их действий), причем условия последней игры зависят от результатов первой игры. С точки зрения задачи анализа равновесные стратегии центров в первой игре определяются зависимостью равновесия игры АЭ от управлений.

В рамках отмеченной выше специфики РСПР необходимо конкретизировать – что будет пониматься под рациональным поведением участников АС. Определение рационального поведения обычно производится следующим образом [15]: в одноэлементной АС считается, что принимающий решения субъект, предпочтения которого описываются скалярной целевой функцией, стремится выбором контролируемых им параметров максимизировать значение этой целевой функции. В случае взаимодействия нескольких субъектов, предпочтения которых описываются скалярными целевыми функциями, считается, что они выбирают равновесные по Нэшу стратегии. В рассматриваемой модели имеются несколько субъектов, предпочтения которых отражены их векторными целевыми функциями. Поэтому введем следующие предположения.

А.2. При заданных управлениях АЭ выбирают стратегии, являющиеся равновесными по Нэшу в смысле невозможности улучшения ни одним из АЭ одновременно всех значений своей векторной целевой функции за счет одностороннего отклонения.

Формально предположение А.2 можно записать следующим образом: АЭ оказываются в одном из элементов множества $E(u)$, определяемого как:

(1) $$E(u) = \{y^* \in A' \mid \forall\, i \in I \ \neg\exists\, y_i \in A_i\colon \forall\, j \in M_i \ f_{ij}(u_i, y_i, y^*_{-i}) \geq f_{ij}(u_i, y^*_i, y^*_{-i}) \text{ и } \exists\, l \in M_i\colon f_{il}(u_i, y_i, y^*_{-i}) > f_{il}(u_i, y^*_i, y^*_{-i})\},$$

где $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – обстановка игры для i-го АЭ, $y_{-i} \in A_{-i} \subseteq \prod_{j \neq i} A_j$, $i \in I$.

Относительно поведения центров примем следующее предположение.

А.3. Решением игры центров $E \subseteq U$ является эффективное по Парето равновесие Нэша.

В [29] показано, что существуют два режима взаимодействия центров – режим сотрудничества (при котором равновесие Парето-эффективно) и режим конкуренции (при котором центры «угрожают» друг другу и равновесие неэффективно по Парето). Полная характеризация равновесий игры центров в одноэлементной АС РК приведена в [14]. Отметим, что в предположении А.3 существенно требование, чтобы равновесие игры центров было эффективно по Парето, что соответствует требованиям практики: ниже будут получены условия непустоты этого множества и исследована его зависимость от управлений вышестоящих органов в многоуровневой АС.

Таким образом, рассматриваемая модель двухуровневой АС (обобщения на случай нескольких уровней управления рассматриваются ниже) характеризуется числом АЭ n, числом центров k, размерностью множества допустимых действий АЭ n_i, размерностью предпочтений АЭ m_i и размерностью предпочтений центров q_i. В рассматриваемой модели все эти параметры могут одновременно принимать значения, большие единицы. Поэтому частными случаями рассматриваемой модели являются (указываются параметры, большие единицы): базовая модель управления в двухуровневых АС ($l_i \geq 1$ [12, 24]), многоэлементные АС с унитарным контролем ($l_i \geq 1$, $n \geq 1$ [28]) и одноэлементные АС с РК ($l_i \geq 1$, $k \geq 1$, $n_i \geq 1$ [12, 24]).

3. СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Так как рассматривается игра типа Г$_2$, то стратегией центра является функция от стратегии АЭ, то есть $u_i = u_i(y)$ (для обозначения функции и ее значения, если это не приводит к путанице, будем использовать одни и те же обозначения). Фиксируем произвольную обстановку $y_{-i} \in A_{-i}$ и определим следующие величины и множества (всюду, где используется максимум или минимум, предполагается, что они достигаются).

Множество стратегий наказания i-го АЭ по j-ой компоненте его целевой функции:

(2) $U_{ij}^{н}(y_{-i}) = \{ u_{ij}^{н}(y_{-i}, \cdot) \in U_i \mid f_{ij}(u_{ij}^{н}(y_{-i}, \cdot), y_i, y_{-i}) =$

$$= \min_{u_i \in U_i} f_{ij}(u_i, y_i, y_{-i})\},\ j \in M_i,\ i \in I,$$

гарантированное значение j-ой компоненты целевой функции i-го АЭ:

(3) $L_{ij}(y_{-i}) = \max_{y_i \in A_i} f_{ij}(u_{ij}^{н}(y_{-i}, y_i), y_i, y_{-i}),\ j \in M_i,\ i \in I.$

Введем следующие предположения.

А.4. $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \ U_{ij}^{н}(y_{-i}) = U_{ij}^{н},\ j \in M_i,\ i \in I.$

А.5. $\bigcap_{j \in M_i} U_{ij}^{н} = U_i^{н} \neq \varnothing,\ i \in I.$

А.6. $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \ L_{ij}(y_{-i}) = L_{ij},\ j \in M_i,\ i \in I.$

Предположения А.4-А.6 можно условно назвать «аксиомами декомпозиции», так как они позволяют декомпозировать игру АЭ и осуществлять согласованное и независимое управление компонентами их целевых функций (см. леммы 1-2 и теорему 1 ниже). Содержательно эти предположения означают следующее.

В соответствии с предположением А.4 множество стратегий наказания любого АЭ по любой компоненте его функции полезности не зависит от обстановки игры. Это выполнено, в частности, если управление входит в целевую функцию АЭ аддитивно (см. задачи стимулирования ниже) или мультипликативно (в последнем случае второй множитель должен быть знакопостоянен).

Предположение А.5 означает, что для каждого АЭ существует такое множество управлений, которые обеспечивают наказание одновременно по всем компонентам его функции полезности. Это предположение выполнено, в частности, когда в каждую компоненту целевой функции входит только одна компонента вектора управлений, или когда все компоненты целевой функции АЭ имеют одинаковые участки монотонности (убывания и возрастания) по управлениям, и т.д.

В соответствии с предположением А.6 гарантированное значение целевой функции каждого АЭ по каждой компоненте не зависит от обстановки игры. Это свойство имеет место, например, если выполнено предположение А.4 и участки монотонности $f_{ij}(\cdot)$ не зависят от обстановки (см. предположения о свойствах функции затрат в задачах стимулирования ниже).

Введенные предположения позволяют получить ряд результатов, характеризующих свойства оптимальных управлений в рассматриваемой модели АС.

<u>Лемма 1.</u> Пусть выполнены предположения А.1-А.5. Фиксируем $(u, x) \in U \times A'$: $x \in E(u)$. Определим

(4) $u' = \begin{cases} u, & y = x \\ u^н, & y \neq x \end{cases}$,

где $u^н = (u_1^н, u_2^н, \ldots, u_n^н) \in U$, $u_i^н \in U_i^н$, $i \in I$. Тогда $x \in E(u')$.

Доказательство леммы 1. Так как $x \in E(u)$, то в соответствии с (1) получаем: $\forall\ i \in I\ \neg\exists\ y_i \in A_i$: $\forall\ j \in M_i\ f_{ij}(u_i, y_i, x_{-i}) \geq f_{ij}(u_i, x_i, x_{-i})$ и $\exists\ l \in M_i$: $f_{il}(u_i, y_i, x_{-i}) > f_{il}(u_i, x_i, x_{-i})$. Пусть $\exists\ i \in I$ и $\exists\ y_i \in A_i$: $\forall\ j \in M_i\ f_{ij}(u'_i, y_i, x_{-i}) \geq f_{ij}(u'_i, x_i, x_{-i})$ и $\exists\ l \in M_i$: $f_{il}(u'_i, y_i, x_{-i}) > f_{il}(u'_i, x_i, x_{-i})$. Если $y_i \neq x_i$, то последнее неравенство противоречит (2), если $y_i = x_i$, то оно должно выполняться как равенство. •

Содержательно лемма 1 означает, что если некоторый вектор действий АЭ является решением игры АЭ, то, изменение управление таким образом, чтобы оно было отлично от стратегии наказания только в случае выбора равновесных стратегий, не изменяет равновесия. Аналогичные результаты (соответствующие частным случаям леммы 1) приведены в [12, 14, 24, 26, 29]. Отметим, что, во-первых, при переходе от управления u к управлению u', определяемому в соответствии с (4), выигрыши центров не изменяются, а, во-вторых, предположение А.6 пока не использовалось. Оно становится существенным для доказательства следующего результата.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения А.1-А.6. Фиксируем (u, x) Î U ´ A': x Î $E(u)$. Определим

$$(5)\ u_i^* = \begin{cases} u_i'(y_i, x_{-i}), & y_i = x_i \\ u_i^н & y_i \neq x_i \end{cases},$$

где u' определяется (4). Тогда x Î $E(u^*)$. Более того, x Î A' – равновесие в доминантных стратегиях (РДС) игры АЭ.

Доказательство леммы 2. Первое утверждение леммы очевидно, поэтому докажем, что x – РДС, то есть, что имеет место

(6) " i Î I " y_{-i} Î A_{-i} ¬∃ y_i Î A_i: " j Î M_i

$f_{ij}(u_i^*, y_i, y_{-i})$ ³ $f_{ij}(u_i^*, x_i, y_{-i})$

и $ l Î M_i: $f_{il}(u_i^*, y_i, y_{-i}) > f_{il}(u_i^*, x_i, y_{-i})$.

Предположим, что $ i Î I, $ y_{-i} Î A_{-i} и $ y_i ¹ x_i: " j Î M_i $f_{ij}(u_i^*, y_i, y_{-i})$ ³ $f_{ij}(u_i^*, x_i, y_{-i})$ и $ l Î M_i: $f_{il}(u_i^*, y_i, y_{-i}) > f_{il}(u_i^*, x_i, y_{-i})$. Подставляя (5), получаем в силу предположений А.4 и А.5, что " j Î M_i $L_{ij}(y_{-i})$ ³ $f_{ij}(u_i^*, x_i, y_{-i})$ и $ l Î M_i: $L_{il}(y_{-i}) > f_{il}(u_i^*, x_i, y_{-i})$. В силу А.6 последняя система неравенств противоречит определению (2) стратегии наказания. ●

Основной результат леммы 2 заключается в том, что, используя управление (5), центры декомпозируют игру АЭ, то есть делают выгодным (в смысле Парето-эффективности соответствующих выигрышей по компонентам функции полезности) для каждого из них выбор действия x_i, независимо от обстановки игры, то есть независимо от выбора других АЭ. Аналогичные результаты (соответствующие частным случаям леммы 2) приведены в [28]. Отметим, что при переходе от управления u к управлению u^*, определяемому в соответствии с (5), выигрыши центров не изменяются.

Совместное использование лемм 1 и 2 позволяет сформулировать следующее утверждение.

<u>Теорема 1.</u> Пусть выполнены предположения А.1-А.6. Тогда в классе управлений вида (5) найдется оптимальное.

Доказательство теоремы 1. Оптимальным называется допустимое управление, максимизирующее критерий эффективности и являющееся равновесием игры центров (см. предположение А.3), при условии, что АЭ выбирают при этом управлении равновесные стратегии (см. предположение А.2). Пусть $u \in U$ - оптимальное управление. Оно обеспечивает центрам в равновесии некоторые полезности и побуждает АЭ выбрать равновесные действия. Последовательно пользуясь результатами лемм 1 и 2, построим в соответствии с выражениями (4) и (5) по управлению u управление u^*. Решение игры АЭ не изменится, выигрыши центров (а, следовательно, и решение их игры) тоже не изменятся. Следовательно, u^* - оптимальное управление. •

Отметим, что теорема 1 обобщает теорему 13 работы [29] на случай многоэлементных АС, а теорему 4.4.1 работы [28] - на случай векторных предпочтений АЭ.

Определим, что будет пониматься под равновесием игры центров. Пусть известна зависимость $y(u): U \to A'$, где $y(u) \in E(u)$. Эта зависимость может определяться введением соответствия отбора равновесий $y(E(u)): 2^{A'} \to A'$ [14, 15, 24], которая каждому множеству равновесий ставит в соответствие единственный вектор действий, являющийся равновесным при данном управлении. Другими словами, будем считать, что известно какие действия выбирают АЭ в зависимости от управлений (эти действия называются реализуемыми данными управлениями).

Определим в соответствии с предположением А.3 равновесие $E \subseteq U$ игры центров:

(7) $E = \{u^* \in U \mid \forall\, i \in K \;\; \neg\exists\, u^i \in U^i: \forall\, j \in Q_i$

$$F^{ij}(u^i, u^{*-i}, y(u^i, u^{*-i})) \geq F^{ij}(u^*, y(u^*))$$

$$\text{и } \exists\, l \in Q_i: F^{il}(u^i, u^{*-i}, y(u^i, u^{*-i})) > F^{il}(u^*, y(u^*))\}.$$

Выражение (7) описывает равновесие игры центров, то есть позволяет анализировать свойства этого равновесия – его существование и т.д. Задача синтеза – конструктивного определения условий непустоты этого множества и др. – решается ниже.

Эффективность РСПР K^0 может быть введена следующим образом. Пусть задан функционал $F^0(y): A' \to \Re^1$, отражающий эффективность состояния управляемой системы с точки зрения метацентра (управляющего органа, находящегося на более высоком уровне иерархии, нежели чем центры, осуществляющие непосредственное управление АЭ). Содержательно, $F^0(\cdot)$ отражает предпочтения метацентра относительно действий АЭ. Следовательно, эффективность РСПР определяется значением этого функционала на множестве реализуемых равновесными управлениями действий АЭ.

Так как множества $E(u)$ и E могут содержать более одного элемента, то необходимо доопределить состояние АС. Введем следующее предположение, отражающее благожелательное отношение АЭ и центров к метацентру (при прочих равных они выберут стратегии, наиболее благоприятные с точки зрения метацентра, то есть стратегии, максимизирующие функционал $F^0(\cdot)$).

А.7. Эффективность РСПР равна

(8) $K^0 = \max\limits_{u \in E} \; \max\limits_{y \in E(u)} \; F^0(y).$

Отметим, что (8) определяет не эффективность управления активными элементами со стороны центров, а эффективность именно РСПР, то есть совокупности центров как системы принятия решений. Если бы мы захотели определить эффективность управления, то следовало бы вычислять максимум некоторой комбинации целевых функций центров на множестве решений игры АЭ и максимизировать эту комбинацию по множеству допустимых или равновесных управлений. Сказанное вовсе не означает, то функционал $F^0(\cdot)$ «не имеет отношения» к рассматриваемой АС: в случае единственного центра он может совпадать с его целевой функцией, тогда (8) перейдет в критерий эффективности управления [24, 28]. Кроме того, этот функционал может определяться таким образом, чтобы максимизировать комбинацию функций полезности АЭ (отметим, что (1) вовсе не гарантирует достижения АЭ Парето-эффективного (в смысле компонент целевых функций всех АЭ, или совокупности компонент, рассматриваемых отдельно для каждого АЭ) состояния).

Рассмотрим частный случай описываемой модели, а именно - задачу стимулирования, которая определяется как игра Γ_2 [12], в которой имеются побочные платежи [11] и целевая функция первого игрока не зависит явным образом от управления [29].

4. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ

Задаче стимулирования соответствуют следующие содержательные интерпретации. Каждый АЭ несет определенные затраты, выполняя те или иные действия. Эти затраты в общем случае зависят от действий всех АЭ.

Управлением со стороны центров, обозначаемом в частном случае задачи управления – задаче стимулирования – символом $s(\cdot)$, является поощрение или наказание АЭ за выбор тех или иных действий, то есть центр (или центры в АС РК) выплачивает АЭ компенсации, зависящие от выбранных ими действий. Зависимость вознаграждения от действий называется функцией стимулирования (механизмом стимулирования, системой стимулирования), которая входит аддитивно в целевые функции участников АС - АЭ получает в точности ту сумму, которую выплачивает ему центр и ценит ее также, как и центр (различие функций полезности становится существенным в АС с неопределенностью [7, 26]).

Таким образом, характерным свойством модели стимулирования является то, что вознаграждение аддитивно входит в целевые функции участников АС (с различными знаками – у центров с минусом, а у АЭ – с плюсом), что позволяет говорить о единообразии определения структуры целевых функций: если существует трансферабельный товар («деньги») [15], то и остальные слагаемые, входящие в целевые функции, должны измеряться в тех же шкалах и, следовательно, быть сравнимыми (см. также ниже определение суммарных затрат центра на стимулирование).

Задача центра заключается в том, чтобы выбором системы стимулирования побудить АЭ выбрать наиболее благоприятные для него действия. Многочисленные примеры постановок и решения задач стимулирования приведены в [11, 14, 26, 27, 28, 29]. Опишем формальную модель стимулирования в рассматриваемой в настоящей работе многоэлементной АС с РК.

Предположим, что предпочтения центров – скалярные, и что каждый центр осуществляет стимулирование каждого АЭ по каждой компоненте целевой функции последнего. Обозначим $\{ s_{ij}^{l}(y) \}_{j \in M_i}$ – совокупность вознаграждений i-го АЭ со стороны l-го центра, $u^l(y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} s_{ij}^{l}(y)$ - суммарное вознаграждение, выплачиваемое l-ым центром всем АЭ, $s_i^l(y) = \sum_{j \in M_i} s_{ij}^{l}(y)$ - суммарное вознаграждение, получаемое i-ым АЭ от l-го центра, $s_i(y) = \sum_{l \in K} s_i^l(y)$ - суммарное вознаграждение, получаемое i-ым АЭ от всех центров, $s_{ij}(y) =$

$\sum_{l \in K} s_{ij}^{l}(y)$ - суммарное по всем центрам вознаграждение i-го АЭ по j-ой компоненте его целевой функции, j Î M_i, i Î I, l Î K. Обозначим $c_{ij}(y)$ – j-тую компоненту затрат i-го АЭ, $c_i(y) = \sum_{j \in M_i} c_{ij}(y)$ - суммарные затраты i-го АЭ, i Î I, $H^l(y)$ – доход l-го центра, l Î K.

В задаче стимулирования целевые функции участников системы имеют вид:

(9) $F^i(y, s^i) = H^i(y) - u^i(y)$, i Î K,

(10) $f_{ij}(y, s_i) = s_{ij}(y) - c_{ij}(y)$, i Î I.

Приведем содержательные интерпретации. Каждый АЭ выбирает определенные действия, которые в терминах ПРР могут интерпретироваться как усилия, направленные на реализацию определенного проекта и приводящие к соответствующим результатам деятельности. Сам АЭ оценивает свою деятельность и деятельность других АЭ по m_i критериям, причем достижение результата y Î A' с точки зрения j-го критерия требует от i-го АЭ затрат $c_{ij}(y)$. Центр с номером l Î K от достижения результата y Î A' получает доход $H^l(y)$ и выплачивает вознаграждения $\{ s_{ij}^{l}(y) \}_{j \text{ Î } M_i,\, i \text{ Î } I}$. Примеры применения такого описания к управлению ПРР приведены ниже.

Задача центров заключается в том, чтобы выбрать такие системы стимулирования, которые побуждали бы АЭ предпринимать наиболее предпочтительные с точки зрения центров действия. Системообразующим фактором в данной модели является то, что вектор результатов деятельности (действий) АЭ является общим для всех центров, что вовлекает их в игру, и вынуждает согласовывать свои интересы и приходить к компромиссам (процесс согласования интересов и свойства компромиссных решений исследуются ниже при описании игры центров).

Введем следующие предположения относительно целевых функций и допустимых множеств участников АС в рассматриваемой модели стимулирования.

А.8. Допустимые множества $A_i \subseteq \Re_+^{m_i}$ ограничены и включают ноль, $i \in I$.

А.9. 1) функция $c_{ij}(\cdot)$ непрерывна по всем переменным; 2) $\forall\ y_i \in A_i$ $c_{ij}(y)$ не убывает по y_i; 3) $\forall\ y \in A'$ $c_i(y) \geq 0$; 4) $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}$ $c_{ij}(0, y_{-i}) = 0$, $j \in M_i$, $i \in I$.

А.10. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

А.11. Функции дохода центров непрерывны по всем переменным и достигают максимума при ненулевых действиях АЭ.

Лемма 3. Если выполнены предположения А.8-А.11, то выполнены предположения А.1, А.4-А.6.

Доказательство леммы 3. Справедливость предположения А.1 следует из А.8, А.9 и А.11. Из (2) и (3) следует, что с учетом А.9 и А.10 стратегию наказания $u_{ij}^{н}(y)$ можно выбрать тождественно равной нулю, независимо от обстановки, откуда следует справедливость А.4 и А.5. Из А.8-А.10 и (3) следует, что независимо от обстановки

(11) $L_{ij} = 0$, $j \in M_i$, $i \in I$,

значит справедливо предположение А.6. •

Таким образом, введенная модель стимулирования является частным случаем описанной выше общей модели управления в многоэлементных АС РК. Следовательно для задачи стимулирования справедливы леммы 1 и 2, а также – теорема 1, которая содержательно означает, что каждый АЭ получает вознаграждения только в случае выбора требуемых действий, независимо от выборов других АЭ. Более того, для задачи стимулирования справедлив следующий результат.

Обозначим $s = \{ s_{ij}^{l}(y) \}_{j\ \hat{I}\ Mi,\ i\ \hat{I}\ I,\ l\ \hat{I}\ K}$. Минимальными суммарными затратами центров $u_{min}(x)$ на стимулирование по реализации вектора действий $x\ \hat{I}\ A'$ назовем решение следующей задачи:

(12) $\sum\limits_{l \in K} J^{l}(x) \rightarrow \min\limits_{\{s_{ij}^{l}\}:\ x \in E(s)}$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения А.2, А.3, А.8-А.11. Фиксируем произвольный вектор действий АЭ $x\ \hat{I}\ A'$. Система стимулирования s, обладающая следующим свойством:

(13) $s_{ij}(y) = \begin{cases} c_{ij}(y) + d_{ij}, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}$,

где $d_{ij} > 0$ – произвольные сколь угодно малые строго положительные константы, $j\ \hat{I}\ M_i$, $i\ \hat{I}\ I$, реализует вектор действий $x\ \hat{I}$ A' как единственное РДС с δ-минимальными суммарными затратами центров на стимулирование, равными:

(14) $u_{min}(x) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in M_i} (c_{ij}(x) + d_{ij})$,

где $d = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in M_i} d_{ij}$.

Доказательство теоремы 2. То, что $x\ \hat{I}$ A' – РДС игры АЭ следует из лемм 1-3. То, что величина (14) не может быть уменьшена обосновывается следующим образом. При использовании системы стимулирования, обладающей свойством (13), в равновесии значение j-го критерия i-го АЭ равно d_{ij}. Величина d может быть сделана сколь угодно малой. В то же время, в силу предположений А.8-А.10, любой АЭ всегда (то есть, независимо от управлений) имеет возможность получить строго нулевую полезность, выбрав нулевые действия.

Наличие строго положительных констант $\{d_{ij}\}$ обусловлено необходимостью обеспечения единственности РДС. В рамках гипотезы благожелательности они могут быть выбраны равными нулю; при этом вектор действий x $\hat{I}$ A' как будет реализован как РДС с минимальными (а не d-минимальными) суммарными затратами центров на стимулирование (см. задачу (12)). •

Следствие из теоремы 2. Системы стимулирования, удовлетворяющие (13) d-оптимальны с точки зрения суммарных затрат центров на стимулирование.

В частном случае, когда имеется один центр, характеризуемый скалярными предпочтениями, теорема 2 переходит в теорему 7 работы [29], которая гласит, что оптимальным реализуемым действием будет действие, доставляющее максимум разности между функцией дохода центра и функцией затрат АЭ.

Содержательно теорема 2 гласит, что «оптимальным» является стимулирование, которое в точности и независимо от обстановки компенсирует каждому АЭ затраты в случае выбора им требуемого действия и равно нулю в случае выбора любого другого действия. Данное утверждение качественно можно рассматривать как синтез принципов: компенсации, декомпозиции и кооперации [31] для многоэлементных АС РК.

Результат теоремы 1 позволяет ограничиться классом управлений вида (4)-(5), определяемых равновесными (в игре центров) управлениями, теорема 2 детализирует свойства оптимальных управлений в задаче стимулирования, но, помимо свойства (13), ничего не говорит о том какие управления центров являются равновесными. Поэтому исследуем более подробно игру центров.

5. ИГРА ЦЕНТРОВ

Рассмотрим сначала многоэлементную двухуровневую АС с РК, в которой центры имеют скалярные предпочтения, а АЭ – векторные. В задаче стимулирования в рамках гипотезы благожелательности в соответствии с результатами теорем 1 и 2 можно ограничиться равновесными (в том числе Парето-эффективными – в соответствии с А.3) стратегиями центров, отличными от нуля только при условии, что АЭ выбирает требуемое действие.

Фиксируем $x\ \hat{I}\ A'$. Рассмотрим стратегии центров вида:

$$(15)\quad s_{ij}^{\,l}(y) = \begin{cases} l_{ij}^{l}, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases},\ j\ \hat{I}\ M_i,\ i\ \hat{I}\ I,\ l\ \hat{I}\ K,$$

где $l_{ij}^{l} \geq 0$ – некоторые константы, $j\ \hat{I}\ M_i,\ i\ \hat{I}\ I,\ l\ \hat{I}\ K$.

Из (14) следует, что должно иметь место

$$(16)\quad \sum_{l \in K} l_{ij}^{l} = c_{ij}(x),\ j\ \hat{I}\ M_i,\ i\ \hat{I}\ I.$$

До окончания настоящего раздела будем считать, что выполнены предположения А.1-А.11.

Лемма 4. Система стимулирования (15)-(16) реализует действие $x\ \hat{I}\ A'$ как РДС игры АЭ и характеризуется минимальными затратами на стимулирование.

Доказательство леммы 4. Система стимулирования (15) с учетом условий (16) удовлетворяет условиям (13) и (14). Следовательно, по теореме 2 в рамках гипотезы благожелательности $x\ \hat{I}\ A'$ – РДС. По следствию из теоремы 2 затраты на стимулирование при этом минимальны, а система стимулирования – оптимальна. •

Следствие из леммы 4. При решении задачи стимулирования без потери эффективности можно ограничиться классом систем стимулирования (15)-(16).

Обозначим

$$(17)\quad W^l = \max_{y \in A'} \{H^l(y) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} c_{ij}(y)\},$$

$$(18)\quad l^l = \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} l_{ij}^{l},\ l\ \hat{I}\ K.$$

Величина W^l характеризует тот выигрыш, который может получить l-ый центр осуществляя управление (и выплачивая вознаграждения) коллективом АЭ в одиночку (без других центров). Следовательно условие индивидуальной рациональности можно для него записать как условие совместной с другими центрами реализации таких действий АЭ, что его выигрыш окажется не менее (17). Другим словами, l-му центру выгодно реализовывать такие действия $x \in A'$, доход от которых с учетом выплат (18) оказывается не меньше (17):

(19) $H^l(x) - \lambda^l \geq W^l,\ l \in K.$

Собирая воедино (16)-(19), определим следующее множество:

(20) $$L(x) = \{ \lambda_{ij}^l \geq 0,\ j \in M_i,\ i \in I,\ l \in K \mid$$
$$H^l(x) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} \lambda_{ij}^l \geq \max_{y \in A'} [H^l(y) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} c_{ij}(y)],\ l \in K;$$
$$\sum_{l \in K} \lambda_{ij}^l = c_{ij}(x),\ j \in M_i,\ i \in I\}.$$

Множество $L(x)$, которое, следуя аналогии с [19], назовем *областью компромисса*, характеризует множество таких комбинаций выплат со стороны центров активным элементам, которые являются равновесием игры центров.

Из теорем 1, 2 и леммы 4 следует справедливость следующего результата.

Теорема 3. Равновесиями игры центров являются управления (15), которые удовлетворяют (20) и реализуют действия $x \in A'$ как РДС игры АЭ.

Из теоремы 3 следует, что реализуемыми являются такие действия АЭ, для которых соответствующие множества (20) непусты.

Обозначим

(21) $$W = \max_{y \in A'} \{ \sum_{l \in K} H^l(y) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in M_i} c_{ij}(y) \},$$

(22) $x^* = arg \max\limits_{y \in A'} \{ \sum\limits_{l \in K} H^l(y) - \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in M_i} c_{ij}(y) \}$.

Следствие из теоремы 3. Если $\$ x$ Î A': $L(x)$ ¹ Æ, то $\sum\limits_{l \in K} W^l \leq W$.

Результат следствия обосновывается суммированием выражений (19) по всем центрам и сравнением получающейся суммы с (21) с учетом определения множества (20).

Как отмечалось в [29], разность $W - \sum\limits_{l \in K} W^l$ может интерпретироваться как «интегральная» мера согласованности интересов центров.

Приведенная ниже лемма позволяет агрегировать описание АЭ и представить их в виде одного АЭ с функцией затрат $c(\cdot)$: A' ® Â^1, определяемой следующим образом:

(23) $c(y) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in M_i} c_{ij}(y)$.

Обозначим $L^* = L(x^*)$, $L = \bigcup\limits_{x \in A'} \Lambda(x)$,

(24) $L'(x) = \{ l^l$ ³ 0, l Î K | $H^l(x) - l^l$ ³ W^l, l Î K, $\sum\limits_{l \in K} l^l = c(x)\}$.

Лемма 5. Для любого x Î A' множество $L'(x)$ непусто тогда и только тогда, когда непусто множество $L(x)$.

Доказательство леммы 5. Фиксируем произвольный x Î A'. Если $L(x)$ ¹ Æ, то из (20) с учетом (18) и (23) получаем, что $L'(x)$ ¹ Æ. Пусть теперь $L'(x)$ ¹ Æ. Из (24) следует, что \$ $\{l^l$ ³ $0\}$: $H^l(x) - l^l$ ³ W^l, l Î K, $\sum\limits_{l \in K} l^l = c(x)$. Условия $H^l(x) - l^l$ ³ W^l, l Î K, в (20) и (24) совпадают. Система неравенств (18), $\sum\limits_{l \in K} l^l_{ij} = c_{ij}(x)$, j Î M_i, i Î I, в силу (23) всегда разрешима (быть может, решение и неединственно) относительно { l_{ij}^{l} }. •

Утверждение леммы 5 позволяет (в том числе за счет теоремы 3) свести рассматриваемую многоэлементную АС с векторными предпочтениями АЭ к одноэлементной АС РК со скалярными предпочтениями АЭ, что дает возможность переносить на рассматриваемый класс моделей результаты, полученные в [14, 29].

Лемма 6. Если $\sum\limits_{l\in K} W^{l} \le W$, то *L* ¹ *Æ*.

Доказательство леммы 6. Следствие из теоремы 3 гласит, что условие $\sum\limits_{l\in K} W^{l} \le W$ выполнено, если множество *L* не пусто. В настоящей лемме требуется доказать обратное утверждение, то есть, что, если $\sum\limits_{l\in K} W^{l} \le W$, то *L* ¹ *Æ*. Предположим противное, то есть пусть $\sum\limits_{l\in K} W^{l} \le W$ и *L* = *Æ*. Тогда по лемме 5 *L’* = $\bigcup\limits_{x\in A'} \Lambda'(x)$. Следовательно, *L***’* = *Æ*.

Последнее условие можно записать следующим образом: " { *l*^{l} ³ 0}: *H*^{l}(*x**) - *l*^{l} ³ *W*^{l}, *l* Î *K* выполнено $\sum\limits_{l\in K} l^{l} < c(x^{*})$ (знак последнего неравенства обусловлен тем, что в (16) для реализуемости соответствующего действия достаточно потребовать, чтобы $\sum\limits_{l\in K} l_{ij}^{l} \ge c_{ij}(x)$, *j* Î *M*$_i$, *i* Î *I*.

Выберем конкретные {*l*^{l}} удовлетворяющие *H*^{l}(*x**) - *l*^{l} ³ *W*^{l}, *l* Î *K*, а именно – положим *l*^{l} = *H*^{l}(*x**) - *W*^{l}, *l* Î *K*. Просуммируем *k* последних равенств: $\sum\limits_{l\in K} l^{l} = \sum\limits_{l\in K} H^{l}(x^{*})$ - $\sum\limits_{l\in K} W^{l}$. По условию леммы получаем, что

$\sum\limits_{l\in K} l^l$ ³ $\sum\limits_{l\in K} H^l(x^*) - W$. Так как по определению $W = \sum\limits_{l\in K} H^l(x^*) - c(x^*)$, то $\sum\limits_{l\in K} l^l$ ³ $c(x^*)$, что противоречит предположению $\sum\limits_{l\in K} l^l < c(x^*)$. •

Величина (21) играет существенное значение для определения непустоты множества $L(\cdot)$ - в частности, следующее следствие лемм 5-7 включает в себя лемму 21 работы [29] как частный случай.

<u>Следствие лемм 5, 6.</u> Если L^* = Æ, то L = Æ. Если $\sum\limits_{l\in K} W^l \leq W$, то L^* ¹ Æ.

Содержательно, из лемм 4-6 следует, что точка x^* Î *A'* является характерной в том смысле, что, если множество L не пусто, то L^* Í L, и наоборот – если L^* = Æ, то L = Æ. Этот факт будет широко использоваться ниже при решении задач согласования интересов центров и др.

В заключение настоящего раздела кратко рассмотрим общий случай, в котором предпочтения центров – векторные. Во втором разделе настоящей работы отмечалось, что в общем случае предпочтения центров отражены их векторными целевыми функциями $F^{ij}(u^i, y)$: U^i ´ *A'* ® R^1, $j = \overline{1, q_i}$, где q_i – «размерность предпочтений» i-го центра, i Î K. В то же время, при рассмотрении задачи стимулирования предполагалось, что целевые функции центров скалярны (см. выражение (9)): $F^i(y, s^i) = H^i(y) - u^i(y)$, i Î K. Все результаты, полученные в настоящем разделе, останутся в силе, если предпочтения центров – векторные и имеют вид: $F^{ij}(y, s^i) = H^{ij}(y) - a^{ij}\, u^i(y)$, где a^{ij} ³ 0, $\sum\limits_{j\in Q_i} a^{ij} = 1$, $j = \overline{1, q_i}$, i Î K, и выполнено предположение А.3, в рамках которого равновесие игры центров определяется по аналогии с равновесием игры АЭ (см. выражение (1)). Однако, такое обобщение является искусственным – как будет видно из последующего изложения, для нужд практических задач использование скалярных предпочтений центров, определенных на векторах результатах деятельности АЭ оказывается достаточным. Следует признать, что ограничиваясь скалярными предпочтениями центров мы уходим от задачи агрегированного представления многокритериальных предпочтений, считая агрегаты $H^i(\cdot)$, $i \in K$, уже заданными (если имеется только совокупность критериев, а агрегат не определен, то для его введения могут использоваться методы, описанные в [2, 3, 18, 30]).

Описав игру центров, перейдем к изучению согласования их интересов и исследованию задач управления в многоуровневых многоэлементных АС РК.

6. РОЛЬ ВЫСШИХ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали двухуровневую АС, содержащую n АЭ на нижнем уровне иерархии и k центров на верхнем уровне иерархии, причем предпочтения АЭ на многомерном множестве действий (результатов их деятельности) были векторными.

В терминах ПРР рассматриваемая модель охватывает, например, следующие ситуации. В регионе имеются n предприятий (или на предприятии имеются n подразделений), планирующих реализовать ПРР (для простоты можно считать, что каждое предприятие или подразделение реализует один и только один ПРР). Деятельность каждого предприятия по реализации ПРР описывается вектором y_i размерности $m_i \geq 1$ результатов его действий (результатов деятельности – результатов реализации соответствующего ПРР). Для достижения результата y_i требуются затраты $c_i(y_i, y_{-i}) = \sum_{j \in M_i} c_{ij}(y_i, y_{-i})$, которые в общем случае зависят от результатов реализации других ПРР. Другими словами, несепарабельность затрат по АЭ отражает возможную взаимосвязь и взаимозависимость ПРР.

Распределенная система принятия решений (например – администрация региона или руководство предприятия) включает k индивидуальных или коллективных субъектов (центров), каждый из которых оценивает эффект $H^l(y)$ от реализации набора ПРР, $l \in K$. Различие между значениями эффектов у различных центров может объясняться различиями их оценок приоритетов критериев, описывающих результаты реализации ПРР. Так, например, одно из подразделений администрации региона может считать наиболее важным социальные аспекты результатов ПРР, другое подразделение – экономические аспекты, третье – экологические и т.д.

Частным случаем такой модели является ситуация, в которой каждый из ПРР описывается одними и теми же показателями, то есть, $n_i = n'$, где n' – число показателей, отражающими результаты ПРР, $i \in I$, и оценивается самими АЭ по одним и тем же критериям, то есть $M_i = M$, $i \in I$, а центрами – быть может по другим, но одним и тем же для всех центров, n' критериям. В еще более частном случае $|M| = n'$. При этом в задаче стимулирования считается, что эффект и затраты измеряются в одних и тех же единицах и входят в целевые функции участников АС аддитивно, что приводит к тому, что «максимизации» эффективности в векторном смысле соответствует максимизация суммарного эффекта за вычетом суммарных затрат.

В качестве примера рассмотрим модельную ситуацию, в которой каждый проект описывается двумя показателями ($n' = 2$): приростом объема производимой продукции y_{i1} и приростом качества y_{i2}, каждый из которых измеряется некоторым неотрицательным действительным числом, $i \in I$. Каждый АЭ оценивает затраты, соответствующие вектору

$y_i = (y_{i1}, y_{i2})$, по двум критериям ($m_i = 2$, $i \in I$): изменение постоянных издержек и изменение переменных издержек, оценки по которым определяются затратами $c_{ij}(y_{i1}, y_{i2}, y_{-i})$, $j = 1, 2$. Таким образом, для получения результата y_i необходимы затраты $c_i(y) = c_{i1}(y_{i1}, y_{i2}, y_{-i}) + c_{i1}(y_{i1}, y_{i2}, y_{-i})$. Три центра ($k = 3$) оценивают эффект вектора y каждый по своему критерию $H^l(\cdot)$: «социальному», «экономическому» и «экологическому», причем единицы измерения выбраны так, чтобы имела смысл суммарная эффективность, определяемая как разность суммарного (по всем критериям центров) эффекта и суммарных (по всем АЭ) затрат.

Завершив содержательные интерпретации описания модели, обсудим теоретические результаты четвертого и пятого разделов.

Теорема 3 и лемма 5 дают решение задачи управления в смысле характеризации множества «простых» - декомпозирующих - управлений, в котором содержится оптимальное решение, и позволяют рассматривать в рамках задачи стимулирования (см. целевые функции (9), 10)) агрегированное описание агентов.

Результаты пятого раздела дают ответ на вопрос – в каких случаях возможна система компенсаций центрами затрат АЭ на реализацию ПРР, такая, что каждому АЭ выгодно реализовывать соответствующий ПРР, и каждому центру выгодна реализация (то есть поддержка во взаимодействии с другими центрами) именно данного набора ПРР по сравнению с самостоятельным финансированием любой группы проектов.

Результаты лемм 4-6 и следствия из них характеризуют множество действий АЭ, которые могут быть реализованы, а также множество соответствующих равновесных стратегий центров. Другими словами, для каждой АС эти формальные результаты позволяют найти множества L и

(25) $S = \{x \in A' \mid L(x) \neq \emptyset\}$.

Множество S может интерпретироваться как множество согласованных [8] (в смысле согласованности интересов и предпочтений центров в соответствии с предположением А.3) результатов реализации ПРР, то есть множество таких векторов действий АЭ, которые центрам выгодно реализовывать совместно как Парето-эффективное и индивидуально рациональное равновесие своей игры. Непустота множества L для некоторого x Î S свидетельствует, что центрам выгодно «скинуться» на реализацию этого действия. В соответствии с леммами 5-6 либо x^* Î S, либо S = Æ.

Таким образом, результаты пятого раздела дают решение *задачи анализа* (отвечают на вопрос – какие управления могут быть выбраны и какие результаты АЭ могут быть достигнуты), то есть задачи определения условий существования равновесий, и позволяют для каждой конкретной АС конструктивно построить множество равновесий и исследовать его свойства (непустоту и др.). Тем не менее, эти результаты не дают решения *задачи синтеза*, то есть не позволяют получить ответа на вопрос – какие управления должны быть выбраны. Нормативный аспект порождает два более частных вопроса:

- что делать, если множество L^* пусто (а если оно пусто, то пусто и множество L - см. следствие лемм 5 и 6)?

- если множество L^* непусто и содержит более одной точки, то каковы должны быть фактические управления?

Пояснений требует словосочетание «должны быть». Если апеллировать к тому, что в рамках парадигмы рационального поведения [15, 24] считается, что должны быть выбраны лучшие управления, то пояснений будет требовать понятие «лучшие». Так как в АС содержится несколько активных субъектов, функция полезности каждого из которых позволяет определять лучшие с его точки зрения альтернативы, то необходимо определить - с чьей точки зрения лучшие управления должны быть выбраны.

При этом возможно несколько подходов. В рамках нормативной теории принятия решений [1, 16, 22] возможно введение агрегированного критерия, удовлетворяющего тем или иным разумным аксиомам и отражающего коллективное мнение центров. Тогда задача будет заключаться в реализации таких действий и в выборе таких управлений, которые максимизируют «коллективный» критерий. Это – один из возможных подходов. Однако, так как мы исследуем задачу управления, то будем реализовывать другой подход (который включает нормативный).

Предположим, что в АС имеется *метацентр* или набор метацентров, находящихся на более высоком уровне иерархии, чем центры (введением этого предположения мы переходим от рассмотрения двухуровневой к многоуровневой АС). Эти метацентры, которые мы иногда будем называть «высшее руководство» или «высшие органы управления», являются активными, то есть, во-первых, обладают собственными интересами и предпочтениями на множестве результатов деятельности АЭ и управлений центров, и, во-вторых, имеют возможность (и право – в рамках рассматриваемой оргструктуры и порядка функционирования) назначать управления, значения которых являются функциями от выборов игроков, делающих свой ход позднее, то есть - от выбора центров и АЭ. Для описания такой модели могут быть использованы результаты разделов 2-5, то есть по аналогии с леммами 4-7 можно строить равновесные стратегии метацентров и т.д. – легко видеть, что описанная выше двухуровневая модель допускает тривиальное наращивание числа уровней иерархии. Делать этого мы не будем, так как, во-первых, в случае необходимости реализация этого подхода не вызовет затруднений, а, во-вторых, получающееся при этом описание будет слишком громоздким для использования на практике. Альтернативой является следующая модель.

Предположим, что имеется метацентр, отражающий интересы системы в целом, на позиции которого находится исследователь операций. В соответствии с результатами, приведенными в [14, 29], известно, что возможны два режима взаимодействия центров промежуточного (в рассматриваемой трехуровневой АС) уровня иерархии – *режим сотрудничества* и *режим конкуренции*.

Режим сотрудничества характеризуется непустотой множества L и Парето-эффективностью (с точки зрения центров) их равновесных стратегий. В режиме конкуренции центры вынуждены «переплачивать» АЭ и соответствующее равновесие их игры неэффективно (в [14] доказано, что, если разрежены трансферты полезностей и образование коалиций, то необходимым условием выгодности для центров образования максимальной коалиции является непустота множества L). Отметим, что в настоящей работе рассматривается только режим сотрудничества.

Следовательно, если интересы метацентра полностью совпадают с интересами центров (например, его целевая функция равна сумме целевых функций центров), то при пустом множестве L задача управления заключается в таком воздействии метацентра на управляемые им субъекты (центры и АЭ), которое обеспечило бы непустоту множества L. Другими словами, в этом случае задачей метацентра (которую мы будем называть *задачей координации* – см. таблицу 1) является перевод центров из режима конкуренции в режим сотрудничества.

Табл. 1. Задачи согласования и управления

	Метацентр не обладает собственными интересами	Метацентр обладает собственными интересами
L = Æ	«Задача координации»	«Задача координации»
L ¹ Æ	«Задача согласования»	«Задача управления»

Возможны и другие постановки задачи управления (см. таблицу 1). Если центр не обладает собственными интересами, множество L непусто и состоит более, чем из одной точки, то задача метацентра заключается в согласовании интересов центров (*задача согласования*), то есть – в назначении на основании некоторого механизма (процедуры принятия решений) конкретной точки из множества L. Если метацентр обладает собственными интересами, то будем считать, что при пустом множестве L он, в первую очередь, заинтересован в переводе центров в режим сотрудничества (упомянутая выше задача координации), а затем – в реализации наиболее выгодных для него действий АЭ и управлений центров (то есть изменении как множества L, так и множества S). Последняя задача и является собственно *задачей управления*. Частные случаи задач координации и управления рассмотрены в [14, 29].

Обсудив качественно роль высших органов управления и перечислив возможные задачи, стоящие перед метацентром, перейдем к решению этих задач.

7. ЗАДАЧА КООРДИНАЦИИ

В настоящем разделе рассматриваются задачи согласования метацентром, не имеющим собственных интересов (отличных от интересов центров) за исключением минимизации затрат на согласование, интересов центров, то есть задачи координации (см. шестой раздел), заключающейся в реализации режима сотрудничества.

Пусть $L = \varnothing$ и задача метацентра заключается в том, чтобы перевести центры из режима конкуренции в режим сотрудничества. В соответствии с леммами 5 и 6 для этого достаточно обеспечить непустоту множества

(26) $L^{*\prime} = \{\lambda^l \geq 0, l \in K \mid H^l(x^*) - \lambda^l \geq W^l, l \in K, \sum_{l \in K} \lambda^l = c(x^*)\}$,

что будет гарантировать выполнение x^* Î L.

По лемме 5 для того, чтобы выполнялось L^* ¹ Æ, достаточно, чтобы $L^{*\prime}$ ¹ Æ, а для этого, в свою очередь, по следствию из лемм 5 и 6 достаточно, чтобы имело место $\sum_{l \in K} W^l \leq W$.

Введем следующие величины:

(27) $c_l^* = max\ \{H^l(x^*) - W^l; 0\}$, l Î K,

(28) $s_l^* = max\ \{W^l - H^l(x^*); 0\}$, l Î K,

(29) $F^0 = c(x^*) + \sum_{l \in K} (s_l^* - c_l^*)$.

Пусть управление заключается во взимании метацентром с центров штрафов $\{c_l^*\}$ и выплате им вознаграждений $\{s_l^*\}$. Тогда в соответствии с (9) целевая функция l-го центра с учетом управлений со стороны метацентра примет вид:

(30) $F^l(y, s^l) = H^l(y) - u^l(y) - c_l^* + s_l^*$, l Î K.

Содержательно, (27) определяет максимальные величины суммарного стимулирования, которые может выплатить l-ый центр без нарушения условия его индивидуальной рациональности в игре центров, (28) – минимальные величины, которые следует доплатить l-му центру для выполнения условия его индивидуальной рациональности в игре центров. Выплаты центров АЭ гипотетически можно заменить их взаимодействием с метацентром, который взимает с центров налог (27) и выплачивает компенсацию (28) центрам и $c(x^*)$ – элементам (см. выражение (29), отражающее целевую функцию метацентра).

Отметим, что можно провести содержательные аналогии между механизмом (27)-(30) и механизмом ключевых агентов, иногда называемым механизмом Гровса [34, 35, 36] (см. также обзор [7] и результаты в [23, 33]).

Легко проверить, что при этом множество L^* не пусто, так как метацентр компенсирует затраты АЭ, а неравенства индивидуальной рациональности у всех центров выполняются как равенства.

<u>Лемма 7.</u> $F^0 = \sum_{l \in K} W^l - W$.

Доказательство леммы 7. В соответствии с (29)

$$F^* = c(x^*) + \sum_{l \in K} (s_l^* - c_l^*) =$$

$$= c(x^*) + \sum_{l \in K} \max(W^l - H^l(x^*); 0) - \sum_{l \in K} \max(H^l(x^*) - W^l; 0) =$$

$$= c(x^*) + \sum_{l \in K} W^l - \sum_{l \in K} H^l(x^*) = \sum_{l \in K} W^l - W. \bullet$$

Содержательно в соответствии с леммой 7 величина F^0 может рассматриваться как минимальная величина собственных средств центра, которая необходима для обеспечения режима сотрудничества между центрами.

Определим следующие зависимости:

(31) $c^l(x) = max\ \{H^l(x) - W^l; 0\}$, l Î K,

(32) $s^l(x) = max\ \{W^l - H^l(x); 0\}$, l Î K.

(33) $F^0(x) = c(x) + \sum_{l \in K} (s^l(x) - c^l(x))$, x Î A'.

<u>Лемма 8.</u> $\forall$ x Î A' $F^0(x)$ ³ F^0.

Доказательство леммы 8. Предположим, что $ x Î A': $F^0(x) < F^0$. Подставляя (27)-(29) и (31)-(33), получаем: $\sum_{l \in K} H^l(x^*) - \sum_{l \in K} H^l(x) < c(x) - c(x^*)$, что противоречит определению величины x^*. $\bullet$

Содержательно лемма 8 означает, что реализация действия x^* в случае режима конкуренции требует от метацентра наименьших затрат, а в случае режима сотрудничества – приносит наибольший доход.

Непосредственным следствием лемм 7 и 8 является следующая теорема (см. также являющуюся частным случаем теорему 24 в [29]).

<u>Теорема 4.</u> Реализация действия x^* оптимальна для метацентра, не обладающего собственными интересами. Его затраты на согласование (29) удовлетворяют следующим соотношениям: если $\sum\limits_{l \in K} W^l$ £ W, то F^0 £ 0; если $\sum\limits_{l \in K} W^l$ ³ W, то F^0 £ 0.

В соответствии с приведенной выше содержательной интерпретацией, если $\sum\limits_{l \in K} W^l$ £ W, то режим сотрудничества между центрами реализуется без вмешательства метацентра, который в соответствии с (27)-(29) имеет возможность получить неотрицательную величину F^0. Если же имеет место $\sum\limits_{l \in K} W^l$ ³ W, то реализация режима сотрудничества между центрами требует вмешательства метацентра, который в соответствии с (27)-(29) тратит (этим обусловлен отрицательный знак) собственные средства, опять же, в размере F^0.

Результат теоремы 4 позволяет обобщить процедуру финансирования на случай, когда имеется несколько уровней [21] управляющих органов в многоуровневой системе: для метацентров третьего (считая снизу) уровня иерархии может быть введена область компромисса, в определении которой должно требоваться, чтобы их суммарные выплаты равнялись F^0. Если эта область пуста, то управляющие органы еще более высоких уровней должны обеспечить выполнение условий индивидуальной рациональности метацентров. Аналогичным образом определяются области компромисса и для более высоких уровней иерархии.

Таким образом, теорема 4 дает решение задачи координации в случае, когда метацентр не обладает собственными интересами. Рассмотрим теперь задачу согласования интересов центров (см. шестой раздел) в случае, когда множество L не пусто.

8. ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ КАК ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА

В соответствии с результатами седьмого раздела величина F^0 характеризует степень согласованности интересов центров, то есть ту сумму, которую необходимо доплатить или возможно изъять (в зависимости от знака выражения (29)). Если множество L пусто, то оптимальное управление со стороны метацентра определяется в теореме 4 и леммах 7 и 8. Поэтому рассмотрим случай, когда множество L не пусто. Тогда по следствию из лемм 5 и 6 не пусто и множество L^*. Метацентру в силу теоремы 4 наиболее выгодно реализовывать действие x^*. Если множество L^* состоит из единственной точки, то, очевидно, $F^0 = 0$. Если множество L^* состоит более, чем из одной точки, то задача метацентра может заключаться в определении конкретной реализации управлений.

Одним из вариантов является изъятие всех излишков центров в соответствии с (27)-(30) – тогда платежи центров однозначны. Альтернативой является перераспределение метацентром этих «излишков» между центрами, то есть, опять же, выбор конкретной точки из множества L^* не за счет самостоятельных договоренностей между центрами, а в соответствии с некоторой процедурой (правилом принятия решений – механизмом), установленной метацентром. Этот подход обладает тем преимуществом, что избавляет центры от необходимости вычисления равновесия (что может оказаться существенным, если их информационные ресурсы ограничены).

Механизмы распределения ресурсов [5, 9, 23] составляют обширный класс процедур принятия решений в управлении организационными (активными) системами и исследуются в теории активных систем [10], теории иерархических игр [12, 13], теории принятия решений [16, 22, 23] и других разделах теории управления социально-экономическими системами. Их частным случаем являются механизмы распределения дохода или затрат [4, 23]. Механизмы распределения ресурса в многоуровневых системах исследовались в [21], в том числе – с точки зрения активности – в [9, 25].

Обозначим

(34) $m^l = H^l(x^*) – W^l$, l Î K.

При использовании метацентром механизма (27)-(30) в равновесии значения целевых функций центров равны W^l, l Î K, а платежи центров (с учетом штрафов и поощрений со стороны метацентра) равны m^l, l Î K. Эти платежи реализуют действие x^* и являются Парето-оптимальными. Следовательно, перед метацентром стоит задача распределения ресурса F^0 между k центрами. Обозначим g^l – количество ресурса, выделяемого метацентром l-му центру, R = - F^0 ³ 0 в силу введенного выше предположения, что рассматривается случай L ¹ Æ. Если метацентр не обладает собственными интересами, то, очевидно, должно выполняться бюджетное (балансовое) ограничение:

(35) $\sum_{l \in K} g^l = R$.

Отметим, что, если метацентр обладает собственными интересами, то он имеет возможность распределять между центрами величину $(1 - x)\, R$, где x Î $[0; 1]$ может интерпретироваться как ставка «налога», выплачиваемого центрами метацентру.

Если имеет место полная информированность, то есть, если все участники АС полностью и достоверно информированы обо всех целевых функциях и допустимых множествах, то центры не имеют возможности повлиять на размер получаемой каждым из них дополнительной (по сравнению с W^l) прибыли g^l. Следовательно, *механизм распределения ресурса* (под которым мы в данном случае будем понимать удовлетворяющий (35) принцип определения величин $\{g^l \geq 0\}$) может задаваться различными способами. Рассмотрим некоторые из них, распространенные на практике [9, 20] и имеющие прозрачные содержательные интерпретации.

1. Принцип равного распределения ($\forall\ l \in K\ \ g^l$ = Const):

$$g^l = R / k,\ l \in K.$$

При использовании принципа равного распределения, очевидно, выполняется (35) и $g^l \geq 0,\ l \in K$.

2. Приоритетный принцип ($\forall\ l \in K\ \ g^l / g^l$ = Const, где $\{g^l > 0\}$ – константы, отражающие приоритеты центров с точки зрения метацентра, $\sum_{l \in K} g^l = k$):

$$g^l = g^l\, R / k,\ l \in K.$$

При использовании приоритетного принципа, очевидно, выполняется (35) и $g^l \geq 0,\ l \in K$. При равных приоритетах приоритетный принцип распределения ресурса переходит в принцип равного распределения.

3. Принцип равных прибылей ($\forall\ l \in K\ \ W^l + g^l$ = Const):

$$g^l = \frac{R + \sum_{l \in K} W^l}{k} - W^l,\ l \in K.$$

При использовании принципа равных прибылей, очевидно, выполняется (35), однако для выполнения $g^l \geq 0$, $l \in K$ необходимо потребовать, чтобы имело место $W^l \leq W / k$, что является гораздо более сильным условием, чем условие $\sum_{l \in K} W^l \leq W$ непустоты области компромисса.

4. Принцип равных рентабельностей ($\forall\ l \in K$ $(W^l + g^l) / m^l$ = Const):

$$g^l = W \frac{m^l}{\sum_{l \in K} m^l} - W^l,\ l \in K.$$

При использовании принципа равных рентабельностей, очевидно, выполняется (35), однако для выполнения $g^l \geq 0$, $l \in K$ необходимо потребовать, чтобы имело место $m^l / W^l \geq \sum_{l \in K} m^l \ / W,\ l \in K$.

5. <u>Принцип пропорционального вклада</u> ($\forall\ l \in K$ g^l / m^l = Const):

$$g^l = R \frac{m^l}{\sum_{l \in K} m^l},\ l \in K.$$

При использовании принципа пропорционального вклада, очевидно, выполняется (35), однако для выполнения $g^l \geq 0$, $l \in K$ необходимо потребовать, чтобы имело место $H^l(x^*) \geq W^l,\ l \in K$.

Перечисление различных механизмов распределения ресурса (принципов определения прибылей центров, выплачиваемых метацентром) можно продолжать и далее (основываясь, например, на пропорциональности ресурса величинам $\{c_l^*\}$, $\{s_l^*\}$ и их комбинациям), используя примененную выше методику. Мы же рассмотрим механизмы распределения ресурса в условиях неполной информированности, то есть в случае, когда существуют неопределенные (неизвестные ЛПР) параметры. В качестве ЛПР будем рассматривать метацентра, а в качестве параметров – неизвестные ему характеристики функций затрат центров (характеристики АЭ будем считать достоверно известными).

Итак, пусть $H^l(y, r^l)$ – функция дохода l-го центра, зависящая от вектора действий $y \in A'$ и параметра $r^l \in W^l$ – типа

l-го центра, неизвестного метацентру. Обозначим $r = (r^1, r^2, \ldots, r^k)$ – вектор типов центров, $r \in \Omega = \prod_{l \in K} \Omega^l$.

Получаем, что в рассматриваемой модели все величины зависят от типов центров:

(36) $x^*(r) = arg \max_{x \in A'} [\sum_{l \in K} H^l(x, r^l) - c(x)]$,

(37) $W^l(r^l) = \max_{x \in A'} H^l(x, r^l) - c(x), l \in K$,

(38) $\mu^l(r) = H^l(x^*(r)) - W^l(r^l), l \in K$,

(39) $\Lambda^{*}{}'(r) = \{\lambda^l \geq 0, l \in K \mid H^l(x^*(r), r^l) - \lambda^l \geq W^l(r^l), l \in K, \sum_{l \in K} \lambda^l = c(x^*(r))\}$,

(40) $R(r) = W(r) - \sum_{l \in K} W^l(r^l)$.

Интересно отметить, что в рассматриваемом механизме распределения ресурсов, в отличие от всех известных механизмов [4, 5, 9, 23, 25, 32], количество распределяемого ресурса в явном виде зависит от типов центров.

Обозначим $\Omega^* = \{r \in \Omega \mid \Lambda^{*}{}'(r) \neq \emptyset\} \subseteq \Omega$ - множество таких векторов типов центров, при которых между ними возможен режим сотрудничества.

Так как точные значения типов центров могут быть неизвестны метацентру, то рассмотрим механизм с сообщением информации [7], в котором центры сообщают метацентру оценки своих типов, а последний использует эти оценки для определения количества выделяемого тому или иному АЭ ресурса (обычно правило, ставящее в соответствие вектору сообщений планы, называется процедурой планирования [24]).

Для механизмов планирования (точнее - механизмов с сообщением информации) характерна проблема манипулируемости – если сообщаемая метацентру информация не может быть им верифицирована, то центры в общем случае будут сообщать информацию, которая приведет к наиболее выгодным для них решениям центра (например, если множество L пусто, то для центров выгодно, чтобы метацентр из своих средств компенсировал агенту как можно большую часть затрат). Поэтому одной из задач является задача исследования манипулируемости механизмов и, в частности, определения множества неманипулируемых механизмов распределения ресурса, то есть таких механизмов, в которых сообщение достоверной информации выгодно для АЭ. Формализуем последнее утверждение.

Введем в рассмотрение функцию предпочтения l-го центра, отражающую зависимость его прибыли от вектора сообщений $s = (s^1, s^2, \ldots, s^k)$ Î S всех центров (в том числе и от его сообщения s^l Î S^l, l Î K, $S = \prod_{l \in K} S^l$):

(41) $j^l(s, r^l) = H^l(x^*(s), r^l) - m^l(s) + g^l(s)$, l Î K,

где $\{g^l(\times)\}^{l \text{Î} K}$ – процедура распределения ресурса.

В рамках теоретико-игровых моделей считается [15], что в условиях игровой неопределенности рациональное поведение субъектов моделируется предположением о том, что они окажутся в том или ином равновесии. Следовательно, выгодность сообщения достоверной информации означает, что достоверные сообщения являются равновесными [15]. Определим равновесие в доминантных стратегиях (РДС) s^d Î S следующим образом. Стратегия s^{ld} Î S^l является доминантной для l-го центра, если

(42) $j^l(s^{ld}, s^{-l}, r^l)$ ³ $j^l(s^l, s^{-l}, r^l)$ ″ s^l Î S^l, ″ s^{-l} Î S^{-l},

где $s^{-l} = (s^1, \ldots, s^{l-1}, s^{l+1}, \ldots, s^k) \in S^{-l} = \prod_{j \neq l} S^j$ - обстановка игры для l-го центра. Если у каждого центра существует доминантная стратегия, то соответствующий вектор называется РДС.

Равновесием Нэша называется вектор s^N Î S, такой, что

(43) $j^l(s^{lN}, s^{-lN}, r^l)$ ³ $j^l(s^l, s^{-lN}, r^l)$ ″ s^l Î S^l, ″ l Î K.

Множество РДС обозначим $E^d(r)$, множество равновесий Нэша обозначим $E^N(r)$. Неманипулируемым будем называть механизм, в котором r Î $E^d(r)$ или r Î $E^N(r)$ (очевидно, что $E^d(r)$ Í $E^N(r)$).

Рассмотрим следующую модель. Обозначим x_i^* Î A' – вектор действий АЭ, который наиболее выгодно реализовать коллективу $K \setminus \{i\}$ центров:

(44) $x_i^* = arg \max\limits_{x \in A'} [\sum\limits_{l \in K \setminus \{i\}} H^l(x) - c(x)]$, i Î K,

(45) $\Lambda_i^{*'} = \{$ l^l ³ 0, l Î $K \setminus \{i\} \mid H^l(x_i^*) - l^l$ ³ W^l, l Î $K \setminus \{i\}$,

$$\sum_{l \in K \setminus \{i\}} l^l = c(x_i^*)\}, i \text{ Î } K,$$

- множество согласованных платежей центров из множества $K \setminus \{i\}$ по реализации вектора x_i^* действий АЭ. Суммарная полезность этих центров (в отсутствии i-го центра) равна $\sum\limits_{l \in K \setminus \{i\}} H^l(x_i^*) - c(x_i^*)$. В присутствии i-го центра суммарная полезность этого множества центров не превышает (максимум достигается, когда для i-го центра условие индивидуальной рациональности существенно) $\sum\limits_{l \in K \setminus \{i\}} H^l(x^*) - c(x^*) + H^i(x^*) - W^i = W - W^i$, i Î K.

Величина $d^i = W - W^i - \sum\limits_{l \in K \setminus \{i\}} H^l(x_i^*) - c(x_i^*)$, которая может интерпретироваться как эксцесс [15], характеризует изменение полезности всех центров, кроме фиксированного, при его добавлении в АС. Следовательно, платежи со стороны метацентра могут основываться на величинах $\{d^l\}_{l \text{ Î } K}$ (см. также механизм ключевых агентов, в котором каждый участник облагается налогом, равным тем потерям, которые несут из-за его присутствия другие участники АС [23, 33, 34]). Платежи метацентра могут также основываться (и именно на этом варианте мы остановимся) на разности $W - W^l$, характеризующей максимальную полезность, которую могут получить остальные центры из-за присутствия l-го центра. Если ресурс, получаемый каждым из центров пропорционален этому вкладу, то соответствующий принцип распределения ресурса можно записать в виде:

$$(46)\ g^i(s) = (W(s) - \sum_{l \in K} W^l(s^l))\ \frac{W - W^i}{kW - \sum_{l \in K} W^l},\ i \in K.$$

Очевидно, что механизм (46) является анонимным и сбалансированным, но в общем случае он манипулируем.

Рассмотрим другой механизм распределения ресурса:

$$(47)\ g^i(s) = W(s) / k - W^i(s^i),\ i \in K.$$

Он также является анонимным и сбалансированным, и, опять же, в общем случае – манипулируемым.

Анализ искажения центрами информации в механизме (47) подсказывает, что избежать манипулирования можно за счет полного перераспределения полезности между центрами, что возможно в рамках следующей процедуры: механизм должен быть таков, чтобы имело место

$$(48)\ j^i(s) = [\sum_{l \in K} H^l(x^*(s), r^l) - c(x^*(s))] / k,\ i \in K.$$

Содержательно в рамках механизма (48) метацентр использует институциональное управление и говорит центрам: сообщайте мне оценки ваших функций дохода, на их основании я вычислю наиболее выгодное для вас действие АЭ и уровняю фактически полученные вами полезности (для этого метацентр должен в итоге достоверно наблюдать эти полезности – в выражении (48) в функциях дохода стоят истинные значения типов центров).

Предположим, что функции $H^l(y, r^l)$ непрерывны и монотонны по параметрам r^l, а множества W^l компактны, $l \in K$. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 5. Механизм (48) является анонимным, эффективным и неманипулируемым, но в общем случае он не удовлетворяет условиям индивидуальной рациональности центров.

Доказательство теоремы 5. Анонимность механизма (48) очевидна, так как он симметричен относительно перестановок агентов.

Пусть все центры, кроме i-го, сообщили достоверную информацию, то есть $s^l = r^l$, l Î $K \setminus \{i\}$. Полезность i-го центра равна:

$$\frac{1}{k}\ [\sum_{l \in K} H^l(x^*(s^i, r^{-i}), r^l) - c(x^*(s^i, r^{-i}))].$$

В силу (36) в рамках введенных предположений максимум этого выражения достигается при $s^i = r^i$. Из (43) следует, что сообщение центрами достоверной информации является равновесием Нэша, то есть механизм неманипулируем. Кроме того, очевидно, что рассматриваемый механизм приводит каждого центра к одному и тому же уровню полезности $W(r) / k$. И, наконец, эффективность по Парето механизма (48) следует из того, что он максимизирует суммарную полезность центров при сообщении ими достоверных оценок. •

Несбалансированность механизма (48) и возможность нарушения условий индивидуальной рациональности является характерным свойством неманипулируемых механизмов с трансферабельной полезностью (см. обзор в [23]).

Пример 1. Пусть $H^l(y, r^l) = 2\, r^l \sqrt{y}$, $l = 1, 2$, $c(y) = y$, $A = \Re^+_1$. Вычислим в соответствии с (36)-(40) следующие величины: $W^l(r^l) = (r^l)^2$, $x^*(r) = (r^1 + r^2)^2$, $W(r) = (r^1 + r^2)^2$, $m^l(r) = r^l (r^l + 2\, r^{-l})$. Если $W = [0; +$¥$)^2$, то ″ r Î W $W^1(r^1) + W^2(r^2)$ £ $W(r)$, следовательно, W^* ¹ Æ.

Метацентр имеет возможность распределить между центрами

$R(r) = m^1(r) + m^2(r) – c(x^*(r)) = W(r) – W^1(r) – W^2(r) = 2\, r^1\, r^2$ единиц ресурса.

Рассмотрим отклонение от равновесия Нэша первого центра. В рамках механизма (48) вычисляем: $x^*(s^1, r^2) = (s^1 + r^2)^2$, $j^1(s^1, r^2) = (r^1 + r^2)\,(s^1 + r^2) - (s^1 + r^2)^2/\,2$. Максимум последнего выражения по s^1 достигается при $s^1 = r^1$. •

Таким образом, рассмотренные механизмы распределения ресурса позволяют решать задачу согласования интересов центров в смысле выбора из множества Парето-оптимальных вариантов конкретного варианта. Преимущество предложенного подхода заключается в том, что исходная задача – определения равновесных платежей центров, то есть - конкретной точки множества L (если оно не пусто) – представляется более сложной для анализа, так как это множество может задаваться сложным образом и иметь сложную конфигурацию. Использование механизма (27)-(30) позволяет эту задачу свести к задаче распределения известного количества ресурса. Применение механизма (48) в силу теоремы 5 делает выгодным для каждого центра сообщение достоверной информации, что позволяет достичь в условиях неполной информированности метацентра эффективного распределения ресурса между центрами.

До сих пор мы рассматривали задачи координации и задачи согласования, соответствующие случаю отсутствию собственных интересов у метацентра (см. таблицу 1). Перейдем к анализу случая, в котором метацентр имеет собственные интересы, то есть – к исследованию задачи управления.

9. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Предположим, что метацентр обладает собственными интересами, быть может, отличными от интересов центров. Интересы метацентра на множестве A' векторов действий агентов будем описывать функцией дохода $H^0(y)$: A' ® $\hat{A}^1$, которую будем считать непрерывной. Частные случаи задачи управления, в которых метацентр облагает центры налогом с дохода или прибыли, рассмотрены в [14].

Возможным вариантом интерпретации роли метацентра является добавление его ко множеству центров. При этом изменится множество компромисса (априори неизвестно расширится оно или сузится), равновесные платежи центров и т.д. Однако этот случай скорее соответствует количественному расширению состава центров, а не введению нового уровня управления. Как отмечалось в [12, 29], наличие метацентра означает присутствие игрока, обладающего правом устанавливать правила игры для других игроков, в том числе – выбирать свои стратегии как функции от выбора других игроков. Поэтому рассмотрим случай, когда метацентр обладает правом первого хода и устанавливает управления для центров, а затем последние выбирают свои платежи активным элементам.

Результаты предшествующего изложения подготовили все необходимое для постановки и решения задачи управления. Выражение (33) определяет баланс бюджета метацентра в зависимости от реализуемого действия. Следовательно целевая функция метацентра $F(x)$ может быть определена как разность между его доходом и затратами (33):

(49) $F(x) = H(x) - c(x) + \sum_{l \in K} (c^l(x) - s^l(x))$, x Î A'.

Приведем содержательные интерпретации. В монографии [27] исследовались механизмы функционирования многоуровневых иерархических организационных систем. В частности, изучались факторы, влияющие на эффективность управления в такого рода системах. Одним из выявленных факторов был так называемый «экономический» фактор, заключающийся в изменении финансовых, материальных и др. ресурсов системы при изменении состава участников системы (управляемых субъектов, промежуточных управляющих органов и т.д.), обладающих собственными интересами.

Изменение эффективности управления за счет привнесения или потребления ресурсов при изменении элементного состава организационной системы имеет место и в двухуровневых системах. Например, добавление нового управляемого субъекта может расширить возможности системы и, наряду с этим, увеличить затраты на поддержание ее деятельности. Другими словами, в общем случае экономический фактор отражает баланс ресурсов (условно - доходов и затрат) в задачах формирования состава системы. Так, например, введение в организации нового промежуточного уровня иерархии с одной стороны может улучшить координацию деятельности подчиненных, а с другой стороны - может потребовать дополнительных затрат на содержание нового административно-управленческого персонала. Наряду с этим, иногда введение дополнительных уровней управления может только ухудшить координацию деятельности подчиненных, например, за счет увеличения задержки принятия решений. В рассматриваемой модели РСПР экономический фактор проявляется в том, что центры, получая собственный доход от деятельности АЭ, берут на себя часть расходов, связанных со стимулированием АЭ.

Теорема 6. Оптимальным является механизм (31)-(33), в рамках которого реализуется действие

(50) $x^0 = arg \max\limits_{y \in A'} F(y)$.

Доказательство теоремы 6. Предположим, что существует другое управление, отличное от $\{c^l(x), s^l(x)\}$, реализующее действие $x' \neq x^0$, такое, что

(51) $H^0(x') - u(x') > F(x^0)$,

где $u(x)$ – минимальные затраты метацентра на реализацию соответствующего действия. В силу лемм 5-7 условия реализуемости включают в себя непустоту множества (26), которое, в свою очередь, задается системой неравенств $H^l(x') - l^l$ ³ W^l, l Î K.

(52) $F^l(y^l) = H^l(y) - u^l(y) - c^l(y) + s^l(y)$, l Î K.

В силу теоремы 3 стимулирование центров по реализации заданного действия минимально. Из (52) и того, что в (50) вычисляется максимум по всем действиям АЭ, получаем противоречие с (51). •

Качественное обоснование результата теоремы 6 заключается в следующем: так как при использовании управлений (31)-(33) полезности всех участников АС, кроме метацентра, равны резервным полезностям, а в (50) определяется оптимальное действие, реализуемое с минимальными затратами метацентра на стимулирование, то $F(x^0)$ – абсолютный оптимум критерия эффективности.

Отметим, что, комбинируя результаты настоящего и предыдущего разделов, можно заложить в механизм управления требования обеспечения всех участников АС некоторыми гарантированными уровнями полезности (резервной полезности). Резервная полезность будет аддитивно входит в условия индивидуальной рациональности, поэтому с ростом резервных полезностей множество компромисса будет сужаться.

Результат теоремы 6 может быть непосредственно обобщен на случай четырех и более уровневых РСПР, а также систем с распределенным контролем на всех уровнях управления.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены теоретико-игровые и оптимизационные модели распределенных систем принятия решений, для которых исследованы равновесные стратегии управляющих органов и управляемых субъектов, решены задачи согласования интересов участников РСПР и управления их взаимодействием.

Перспективным направлением будущих исследований представляется изучение РСПР, функционирующих в условиях неопределенности, а также кооперативных эффектов взаимодействия центров в многоуровневых системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.

2. Арсланов М.З. Скаляризация задачи построения множества оптимальных по Слейтеру решений // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 8.

3. Березовский Б.А., Барышников Р.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука.

4. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997.

5. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.

6. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.

7. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.

8. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.

9. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.

10. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999.

11. Гермейер Ю.Б., Ерешко Ф.И. Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1974. № 14. С. 1437 - 1450.

12. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

13. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.
14. Губко М.В., Караваев А.П. Согласование интересов в матричных структурах управления // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 132 – 146.
15. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
16. Данилов В.И., Сотсков А.И. Механизмы группового выбора. М.: Наука, 1991.
17. Ириков В.А., Тренев В.Н. Распределенные системы принятия решений. М.: Наука, 1999.
18. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
19. Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000.
20. Леонтьев С.В., Масютин С.А., Тренев В.Н. Стратегии успеха: обобщение опыта реформирования российских промышленных предприятий. М.: ООО «Типография «Новости», 2000.
21. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
22. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
23. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
24. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
25. Новиков Д.А., Петраков С.Н., Федченко К.А. Децентрализация механизмов планирования в активных системах // Автоматика и Телемеханика. 2000. №.6. С. 126 - 137.
26. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
27. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
28. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.

29. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
30. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
31. Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. М.: Апостроф, 2001.
32. Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
33. Green J., Laffont J.J. Incentives in public decision-making. Studies in public economics. Vol.1. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979.
34. Groves T. Incentives in teams // Econometrica. 1973. Vol. 41. N 4. P. 617 – 631.
35. Groves T., Loeb M. Incentives in a divisionalized firm // Management Science. 1979. Vol. 25. N 3. P. 221 – 226.
36. Groves T., Radner R. The allocation of resources in a team // J. of Economic Theory. 1972. Vol. 4. N 2. P. 415 - 441.
37. Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
38. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.